# Engrenages et développantes de cercle

G. Cuisinier et M.-F. Guissard

## Introduction

Notre travail a pour but d'étudier conjointement les engrenages et les développantes de cercle. Les documents que nous avons consultés sur ce sujet se répartissent en deux groupes : ce sont soit des descriptions techniques minutieuses n'apportant pas de réelles explications sur le fonctionnement, soit des traités de mécanique théorique, d'un niveau de mathématiques inaccessible aux élèves de l'enseignement secondaire.

Ce texte est une tentative de réconcilier ces deux tendances, il consiste en une alternance de passages théoriques et de propositions d'activités à mener avec les élèves dans les classes (ces activités comporteront dans la marge la rubrique *Comment s'y prendre ?*). Il propose une approche des engrenages, basée tout d'abord sur l'observation de leur fonctionnement. Une analyse plus fine du système dans quelques étapes successives du mouvement amène à découvrir peu à peu les propriétés géométriques des courbes qui constituent le profil des dents. Ces propriétés sont aussi celles d'une courbe particulière : la développante de cercle, ce qui explique la construction d'un engrenage et son fonctionnement.

Nous essayons d'éviter deux écueils. Le premier est de se limiter à des observations, le second de se placer d'emblée dans un contexte théorique quelque peu rebutant. Les activités peuvent être proposées à différents types d'élèves. Pour des élèves de l'enseignement technique, l'intérêt pour les engrenages motive la découverte des propriétés géométriques de la développante de cercle tandis qu'avec des élèves de l'enseignement général, c'est l'occasion de montrer une application pratique d'un problème de lieu et de la construction d'une courbe à partir des équations paramétriques. Chaque professeur adaptera ce qui suit à son public, des démonstrations intuitives sont proposées en alternative aux démonstrations analytiques pour les élèves auxquels elles seraient jugées inaccessibles.

*De quoi s'agit-il ?*

Observer le fonctionnement d'un engrenage, analyser ses propriétés géométriques pour arriver à sa construction.

*Enjeux*

La normale à une courbe.

La développante de cercle et ses propriétés géométriques.

Une approche mathématique des engrenages.

*De quoi a-t-on besoin ?*

***Matériel***

Un engrenage. Du matériel de dessin. Des photocopies sur transparents des documents fournis en annexe.

***Prérequis***

Notion intuitive de tangente, de tangente commune à deux courbes en un point de contact.

Construction de la tangente à un cercle, de la tangente commune à deux cercles.

Longueur d'un arc de cercle.

Tangente d'un angle dans le triangle rectangle.

# 1 Transmission du mouvement

Les engrenages sont des pièces qui ont pour rôle de recevoir le mouvement de rotation d'un arbre et de le transmettre à un autre (éventuellement en changeant la vitesse dans un rapport donné).

## 1.1 Cylindres de friction

Un moyen élémentaire pour transmettre le mouvement consiste à utiliser des *cylindres de friction*. Ce sont des cylindres d'axes parallèles dont les surfaces latérales sont mises en contact par pression suivant une génératrice.

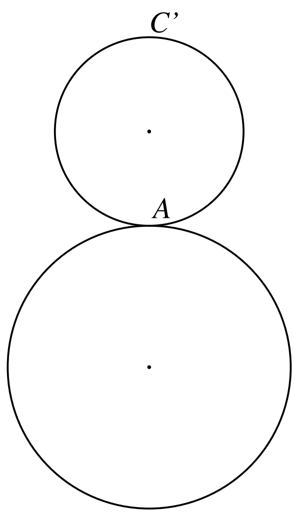


*Fig. 1*

On considère deux cylindres $C$ et $C'$ de diamètres respectifs $d$ et $d'$. Leurs vitesses de rotation exprimées en tours par seconde sont $N$ et $N'$. S'il n'y a pas de glissement de $C$ sur $C'$, la vitesse tangentielle au point de contact $A$ est la même sur les deux cylindres. On les obtient en multipliant le nombre de tours par seconde par la circonférence du cylindre, ce qui donne,

– pour le cylindre $C$ : $v_A = \pi d N$,

– pour le cylindre $C'$ : $v_A = \pi d' N'$.

Ces vitesses sont exprimées en mètres par seconde (m/s) si le diamètre est exprimé en mètres. On en déduit que

$$dN = d'N' \text{ et que } \frac{N}{N'} = \frac{d'}{d}.$$

Le rapport des vitesses de rotation des cylindres est égal au rapport inverse de leurs diamètres.

Ainsi, par exemple, si le cylindre $C$ a un diamètre deux fois plus grand que celui du cylindre $C'$, sa vitesse de rotation sera deux fois plus petite. Pendant que le cylindre $C$ fait un tour, le cylindre $C'$ en fait deux.

## 1.2 Engrenages : description et vocabulaire

Pour éviter le glissement, on remplace les cylindres de friction par des *roues dentées*. Il faut alors prendre des cylindres de diamètres un peu plus grands et les tailler de telle sorte que les *dents* de l'un pénètrent dans les *évidements* de l'autre (les évidements sont les espaces entre les dents). Le dispositif ainsi obtenu est appelé *engrenage*. Il existe différents types d'engrenages comme les engrenages droits (figure 2), les engrenages à denture hélicoïdale et les engrenages coniques pour des arbres non parallèles (figure 3).

*Fig. 2*

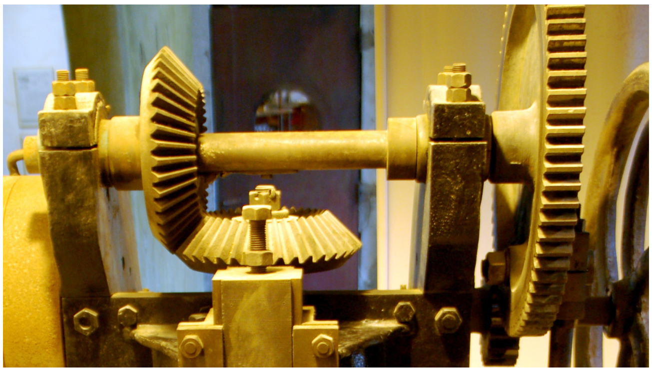

*Fig. 3*

Nous ne considérerons dans ce travail que des engrenages droits à denture droite. Les engrenages droits sont formés de deux roues dentées d'axes parallèles et sont utilisés pour transmettre le mouvement entre deux arbres parallèles. Les dentures droites sont telles que les surfaces qui viennent en contact sont engendrées par des droites parallèles aux axes de rotation des arbres. Toutes les dents d'une même roue sont identiques, ainsi que les évidements.

*Comment s'y prendre ?* On invite les élèves à observer un engrenage simple, comme celui de la photo de la figure 2, et dans un premier temps, à le décrire. C'est à partir de ces observations qu'on va fixer le vocabulaire.

Les cylindres de friction fictifs remplacés par des roues dentées sont appelés *cylindres primitifs*. On appelle *cercle primitif* la section droite d'un cylindre primitif, son diamètre est le diamètre primitif (noté $d_p$).

Pour construire un engrenage, on remplace les cylindres de friction par des *roues dentées* obtenues en taillant des cylindres de diamètres un peu plus grands appelés *cylindres de tête*. On appelle *cercle de tête* la section droite d'un *cylindres de tête*, c'est un cercle passant par le sommet des dents, son diamètre est le diamètre de tête. Dans cette même section droite, on appelle *cercle de pied* le cercle passant par le pied des dents, son diamètre est le diamètre de pied.

La *surface active* est la portion de la surface d'une dent sur laquelle s'effectuent les contacts de cette dent avec les dents de l'autre roue.

Le *profil d'une dent* est l'intersection de la surface active et d'un plan perpendiculaire à l'axe de la roue.

Le *pas primitif* est la longueur de l'arc de cercle primitif compris entre deux profils successifs correspondants. Si on note $d_p$ le diamètre du cercle primitif, $p$ le pas primitif et $z$ le nombre de dents, on a :

$$p \cdot z = \pi d_p \quad \text{et donc} \quad p = \frac{\pi d_p}{z}$$

Pour que deux roues engrènent, il faut qu'elles aient le même pas primitif $p$. Les largeurs des dents et des évidements sont les mêmes sur les deux roues.

La *hauteur de la dent* est la différence entre le rayon du cercle de tête et le rayon du cercle de pied.

## 1.3 Observation du fonctionnement

*Comment s'y prendre ?*

En manipulant l'engrenage, les élèves se rendent compte que le mouvement se transmet de manière très régulière. On imagine bien que cette régularité de la transmission du mouvement est liée à la forme des dents. Cette observation motive l'étude des propriétés géométriques de la courbe du profil des dents.

Une phase d'observation est consacrée à l'analyse détaillée du mouvement de deux roues d'engrenages de même diamètre qui engrènent. Toutes les dents des deux roues sont donc identiques. On fait tourner à la main cet engrenage dont les arbres sont fixés sur une planche. On fait tourner la roue de droite dans le sens horlogique. Elle entraîne la roue de gauche dans le sens contraire.

Les élèves reçoivent des photos (reproduites en annexe) représentant six positions très voisines du système et analysent le mouvement. Ces documents servent de support à des constructions permettant de vérifier quelques propriétés géométriques. On va s'intéresser au contact qui se trouve en $T$ dans la position initiale. On observe que deux dents en contact ont une tangente commune en leur point de contact.


| |
|---|
| Dans la position initiale, deux profils sont en contact en $T$. Sur chaque figure, repérer le nouveau point de contact de ces deux profils et tracer à vue la tangente commune. Ensuite, construire la perpendiculaire à cette tangente. Cette perpendiculaire est appelée *normale* au deux courbes. Comment évolue cette normale lorsque la roue tourne ? |

Les figures 4 à 9 illustrent cette phase de travail.

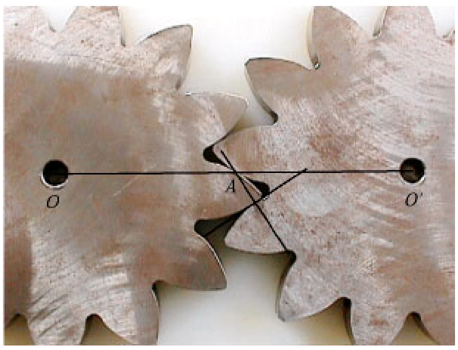


*Fig. 4*

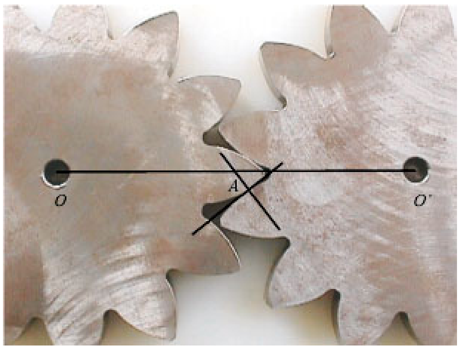


*Fig. 5*

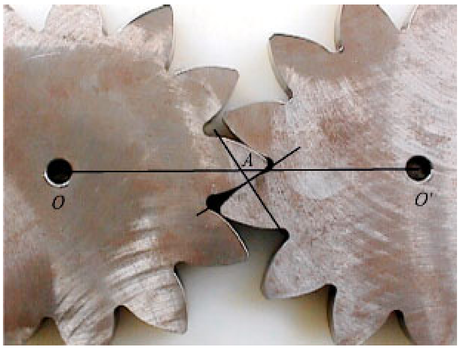


*Fig. 6*

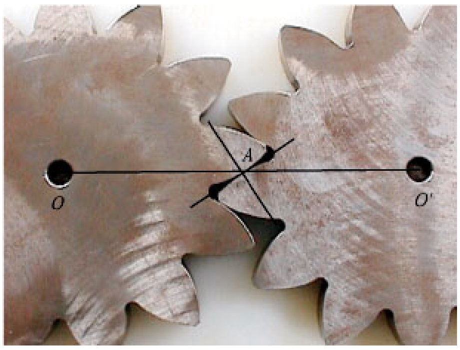


*Fig. 7*

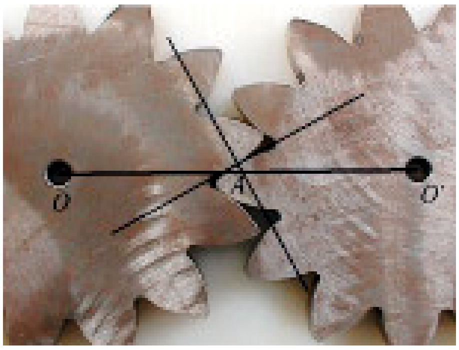


*Fig. 8*

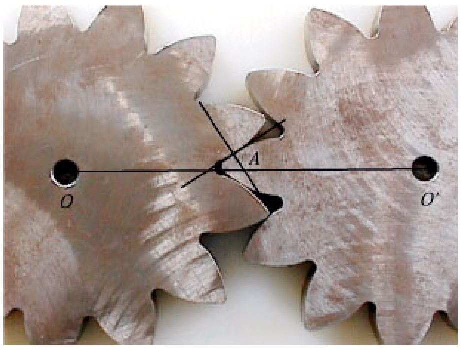


*Fig. 9*

Ces constructions semblent montrer que la tangente et la normale au point de contact ont constamment une même direction pendant toute la durée du contact. On peut s'en assurer en mesurant sur chaque photo l'angle que forme chacune de ces deux droites avec la droite $OO'$ joignant les centres des arbres des deux roues. De plus, la normale coupe la droite $OO'$ en son milieu, et donc elle est fixe pendant toute la durée de l'engrènement.

Le point de contact des deux profils mobiles, situé à l'intersection de la tangente et de la normale dont la position est fixe, reste donc sur une droite fixe. Cette propriété est étonnante.

*À chaque instant, les courbes occupent une position différente, le point de contact est un point mobile sur chacune de ces courbes, mais la normale commune à ces courbes au point de contact est une droite fixe.*

La position particulière du point $A$, au milieu de $OO'$ dans notre exemple, est due au fait que les deux roues ont le même diamètre. On conjecture que si les roues sont de diamètres différents, le point $A$, point d'intersection de la normale avec la droite des centres, occupera une autre position sur $OO'$.

Le profil de la dent possède donc la propriété suivante : lorsqu'il tourne autour du centre de la roue, il reste perpendiculaire à une droite fixe[1] pendant toute la durée du contact. Il existe une courbe qui possède une telle propriété, c'est la *développante de cercle*. La plupart des profils de denture utilisés de nos jours ont la forme d'une développante de cercle et c'est le cas pour

[1]Nous dirons qu'une courbe est *perpendiculaire* à une droite si la droite est normale à la courbe.

l'engrenage que nous venons d'observer.

Nous allons donc nous consacrer à présent à l'étude de cette courbe et de ses propriétés géométriques.

# 2 La développante de cercle

## 2.1 Définition

Lorsqu'on déroule un fil enroulé autour d'un cercle en le maintenant bien tendu, son extrémité décrit une courbe qui est appelée *développante de cercle.*

Plus précisément, on définit la développante de cercle de la manière suivante : c'est la courbe décrite par un point $P$ d'une droite qui roule sans glisser sur un cercle appelé *cercle de base.* Ainsi sur la figure 10 le point $P$ passe par les positions $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \ldots$ qui sont des points d'une développante $\gamma$. Le point $P_1$ est appelé point de départ. Si la droite roulait sur le cercle en allant vers la gauche, le point $P$ engendrerait l'autre moitié de la développante, symétrique de celle qui est représentée par rapport au diamètre passant par $P_1$.

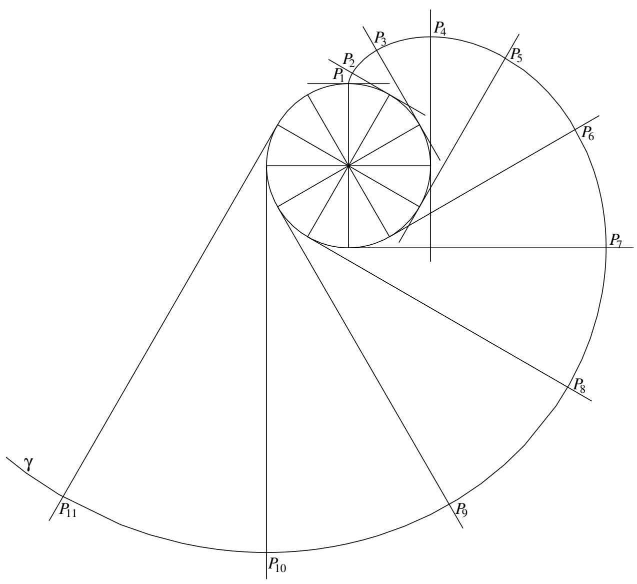


*Fig. 10*

## 2.2 Construction

*Comment s'y prendre ?*

> Construire une développante de cercle en divisant un cercle de base, de 4 cm de diamètre, en 12 parties égales et en plaçant le point de départ sur le point le plus élevé du cercle. Construire la partie de la développante allant vers la droite.

Le point le plus haut du cercle, $P_1$, est le point de départ de la développante (voir la figure 11). C'est l'extrémité d'un fil imaginaire entièrement enroulé autour du cercle. Pour déterminer les autres points, divisons le cercle en douze parties égales à partir de $P_1$ et en allant vers la droite, appelons $T_2, T_3, T_4, \ldots$ les points qui divisent le cercle en 12. Par $T_2$, traçons la tangente au cercle. En pensant à l'image du fil que l'on déroule, on situe un deuxième point de la développante en $P_2$ sur la partie supérieure de la tangente, qui est tel que la longueur $|T_2P_2|$ est égale à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{T_2P_1}$. Comme la longueur du cercle est $4\pi$, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{T_2P_1}$ est égale à :

$$\frac{4\pi}{12} = 1,047\ldots\text{cm}.$$

De la même manière, nous déterminons un troisième point $P_3$. En $T_3$, nous traçons la demi-tangente qui représente le fil que l'on déroule. Sur cette demi-tangente, nous déterminons $P_3$ tel que

$$|T_3P_3| = \text{longueur de l'arc } \overset{\frown}{T_3P_1} = 2\frac{4\pi}{12} = 2,094\ldots\text{cm}.$$

On continue de cette manière pour chaque point de division du cercle.

Après un tour complet, le point de contact revient au point $P_1$. La tangente en $P_1$ est horizontale et le point $P_{13}$ à gauche de $P_1$ tel que la longueur du fil tendu est égale à un tour complet du cercle. On a donc :

$$|P_1P_{13}| = 4\pi = 12,566\ldots\text{cm}.$$

La développante ne s'arrête pas ici, nous pourrions continuer de la tracer en faisant un deuxième tour, puis un troisième... Sa longueur est donc infinie.

On aurait pu faire la même construction en allant vers la gauche. On aurait alors construit l'autre moitié de la développante du même cercle symétrique de la précédente par rapport au diamètre vertical du cercle de base.

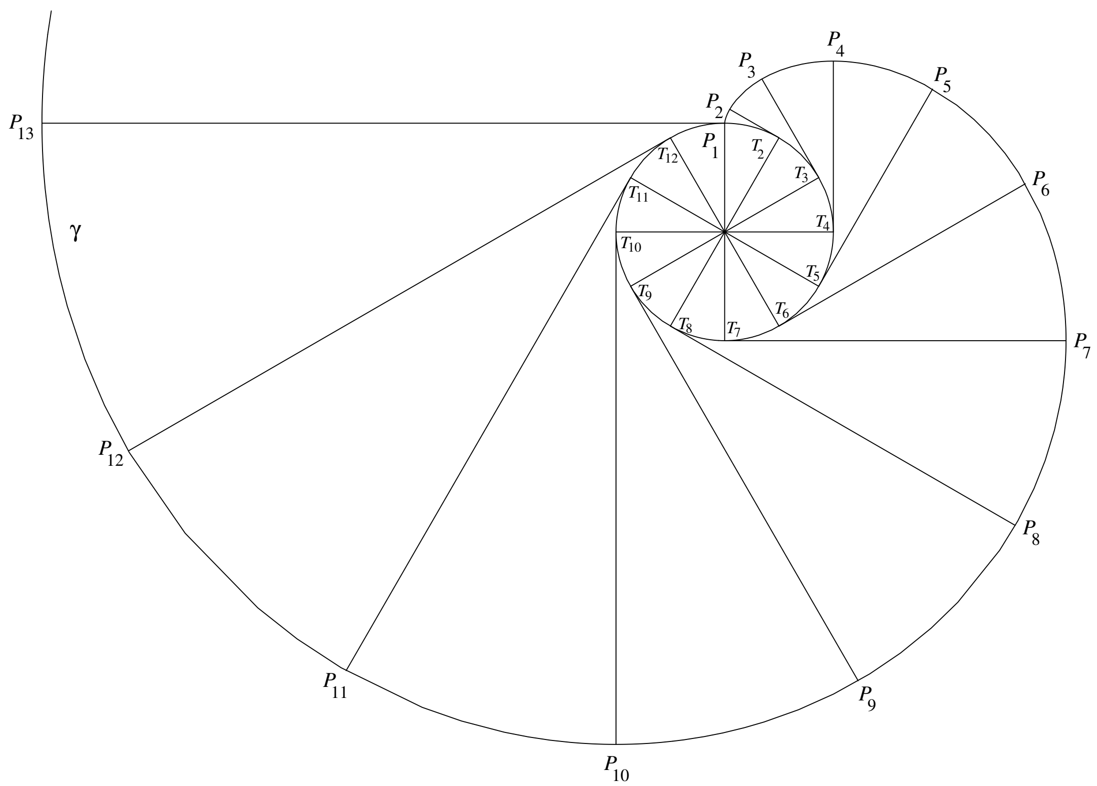


*Fig. 11*

### 2.3 Équations de la développante

Soit $Q(r, 0)$ le point de départ de la courbe, correspondant à l'angle nul, et $T$ le point de contact d'une droite qui roule sans glisser sur le cercle. Notons $t$ la mesure en radians de l'angle $\widehat{QOT}$ et calculons les coordonnées cartésiennes d'un point $P$ quelconque de la développante.

Le point $P$ est déterminé par l'équation vectorielle $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TP}$. La longueur du segment $[PT]$ est égale à la longueur de l'arc $\widehat{QT}$ dont la mesure est $rt$.

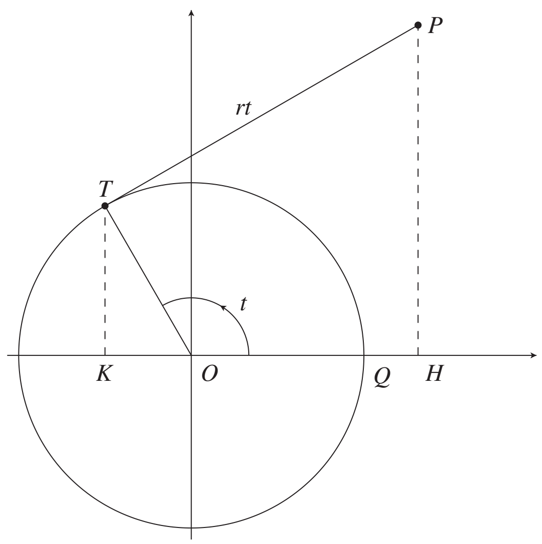


*Fig. 12*

On trouve pour le vecteur $\overrightarrow{OT}$

$\overrightarrow{OT}= r\cos t\cdot \overrightarrow{e_1} + r\sin t\cdot \overrightarrow{e_2}$,

et pour le vecteur $\overrightarrow{TP}$

$\overrightarrow{TP}= rt\cos(t-\dfrac{\pi}{2})\cdot \overrightarrow{e_1} + rt\sin(t-\dfrac{\pi}{2})\cdot \overrightarrow{e_2}$

$\overrightarrow{TP}= rt\sin t\cdot \overrightarrow{e_1} - rt\cos t\cdot \overrightarrow{e_2}$.

En effectuant la somme de ces deux vecteurs et en séparant les composantes, on obtient les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = r\cos t + rt\sin t \\ y = r\sin t - rt\cos t \end{cases}$$

### 2.4 Propriété de la développante

*Comment s'y prendre ?*

La manipulation suivante permet d'observer une propriété très particulière de la développante de cercle. On fournit aux élèves deux photocopies de la figure 11, l'une sur papier, l'autre sur transparent.

> On dispose de deux exemplaires d'une figure représentant un cercle et sa développante, l'un sur papier et l'autre sur transparent. Sur la figure, prolonger et colorier la demi-tangente en $T_2$ du côté de $P_2$. Superposer le transparent et la figure et fixer les centres par une épingle. Faire tourner le transparent autour du centre.
>
> Observer et évaluer la mesure de l'angle formé par la demi tangente colorée et la développante dans ses différentes positions.

En faisant la manipulation, on observe qu'en tournant, la développante $\gamma$ reste perpendiculaire à la demi-droite colorée, tangente au cercle de base. Cela nous amène à conjecturer la propriété suivante.

***Propriété :*** *En chacun de ses points, une développante de cercle est perpendiculaire à la tangente au cercle de base issue de ce point.*

Nous proposons ci-après deux approches différentes pour expliquer cette propriété. Chaque lecteur choisira celle qui le convainc le mieux.

***Démonstration analytique :***

Montrons qu'en chaque point d'une développante, le vecteur tangent au cercle de base et le vecteur tangent à la développante sont perpendiculaires.

Les équations paramétriques du cercle et de la développante sont respectivement (figure 12).

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = r\cos t + rt\sin t \\ y = r\sin t - rt\cos t \end{cases}$$

En dérivant chacun des deux systèmes par rapport à t, on trouve les composantes du vecteur tangent au cercle et à la développante.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -r\sin t \\ \frac{dy}{dt} = r\cos t \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = rt\cos t \\ \frac{dy}{dt} = rt\sin t \end{cases}$$

Le produit scalaire des vecteurs tangents

$$(-r\sin t\ \overrightarrow{e_1} + r\cos t\ \overrightarrow{e_2}) \cdot (rt\cos t\ \overrightarrow{e_1} + rt\sin t\ \overrightarrow{e_2}) = (-r\sin t)\cdot(rt\cos t) + (r\cos t)\cdot(rt\sin t)$$

est clairement nul, ce qui établit qu'en chaque point d'une développante, le vecteur tangent au cercle de base et le vecteur tangent à la développante sont perpendiculaires.

***Démonstration intuitive :***

Rappelons que la figure 11 a été construite en considérant la développante comme trajectoire d'un point fixe d'une droite qui tourne sans glisser sur le cercle. Lorsque la droite est dans la position $T_4P_4$, le point $T_4$ de cette droite est au repos puisque les points au-dessus de $T_4$ vont vers la droite et ceux qui sont en dessous vont vers la gauche. Le point $T_4$ est donc un centre instantané de rotation et pendant un laps de temps infiniment petit, le mouvement de $P_4$ se fait sur un arc de cercle infiniment petit dont le centre est le point $T_4$. Si on reprend l'image du fil que l'on déroule, on peut admettre que, pendant un laps de temps infiniment petit, l'extrémité du fil décrit un arc de cercle dont le centre est le point où le fil quitte le cercle. La développante est donc constituée d'une infinité d'arcs de cercle infiniment petits et dont les rayons sont de plus en plus grands. Or la tangente en un point à un arc de cercle est perpendiculaire au rayon passant par ce point. On en déduit, qu'en chacun de ses points, une développante de cercle est perpendiculaire à la tangente au cercle de base qui a servi à la construction de ce point. Autrement dit, la développante est perpendiculaire à cette droite.

De la même manière, on explique qu'en chacun de ses points la demi-tangente $P_4T_4$ (ou n'importe quelle autre demi-tangente) est perpendiculaire à la développante qui la coupe en ce point.

Expliquons autrement cette propriété. Nous savons que, en $P_5$ par exemple, $\gamma$ est perpendiculaire à $P_5T_5$ (Figure 13). Si le cercle de base tourne, $\gamma$ et $P_5T_5$ tournent en restant perpendiculaires l'une à l'autre. Ainsi en faisant tourner le cercle, on amène $P_5T_5$ sur la demi-droite $d$, tangente au cercle en $T_2$, $\gamma$ se superpose à $\gamma*$ (développante issue de $T_{10}$) et donc $d$ est bien perpendiculaire à $\gamma*$.

Inversement, en un quelconque de ses points, une développante est perpendiculaire à une des tangentes au cercle de base issues de ce point.

*Si une développante tourne autour du centre du cercle de base, elle reste toujours perpendiculaire à toutes les tangentes et donc à une tangente quelconque choisie. Comme le profil d'une dent d'engrenage reste toujours perpendiculaire à une même droite, la forme du profil de la dent pourrait donc être une développante de cercle.*

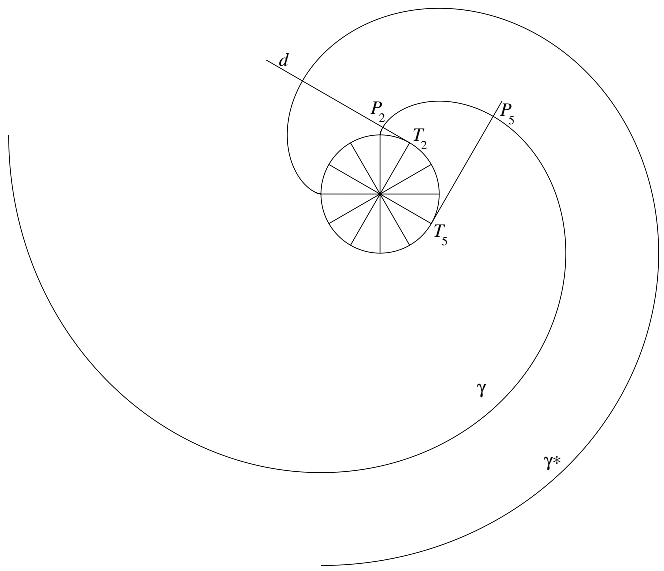


*Fig. 13*

## 3 Construction des profils en développante de cercle de deux dents en contact

Nous avons observé qu'un engrenage est composé de deux roues dentées dont les profils de dents sont perpendiculaires à une même droite lorsqu'ils sont en contact.

*Comment s'y prendre ?*

On distribue une feuille de travail sur laquelle figurent deux cercles $\mathcal{C}_\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}'_\mathcal{B}$, de centres $O$ et $O'$, de rayons respectivement 3 cm et 6 cm. La droite qui joint les centres est placée en position verticale.

1. En quel point de $OO'$ doit se trouver le point de contact de deux développantes de ces cercles pour qu'elles soient toutes deux perpendiculaires à une même droite ?
2. Construire ce point et calculer ensuite sa position.
3. Ébaucher le schéma des deux développantes et calculer la position de leur point de départ sur le cercle de base.

Voici quelques éléments de réponse.

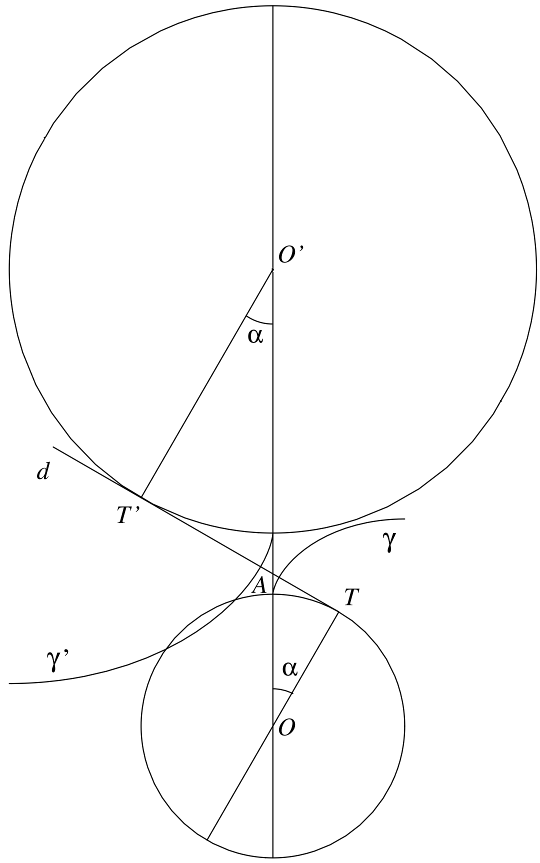


*Fig. 14*

1. En chacun de ses points, une développante de cercle est perpendiculaire à une tangente à son cercle de base. Pour qu'en un point une droite $d$ soit perpendiculaire à deux développantes de deux cercles différents, il faut donc que $d$ soit tangente commune aux deux cercles de base.

   Pour que deux développantes des cercles $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ et $\mathcal{C}'_{\mathcal{B}}$ soient, en leur point de contact, toutes deux perpendiculaires à une même droite, leur point de contact doit être sur la tangente commune des deux cercles de base. Nous choisirons une tangente intérieure, notée $d$, pour que le point d'intersection de la tangente commune avec la droite des centres soit sur le segment $[OO']$ (voir figures 4 à 9). Notons $A$ ce point, position particulière du point de contact des deux développantes. Le point $A$ est appelé *point d'engrènement*.

2. Appelons respectivement $T$ et $T'$ les deux points de contact de $d$ avec les cercles. On remarque que, si $d$ forme un angle de $\alpha$ avec la direction horizontale, les angles $\widehat{AOT}$ et $\widehat{AO'T'}$ valent également $\alpha$.

   Les triangles $AOT$ et $AO'T'$ de la figure 14 sont semblables, de rapport de similitude 2. Le point $A$ est donc le point de $[OO']$ tel qu $|O'A| = 2|OA|$.

3. Si nous traçons les deux développantes $\gamma$ et $\gamma'$ en plaçant leurs points de départ sur le segment $[OO']$, les développantes sont toutes deux perpendiculaires à $d$ mais ne se touchent pas. Pour que les deux développantes représentent deux profils de dents en contact, il faut de plus qu'elles aient un point commun.

Déterminons leur point de départ respectif $D$ et $D'$ sur leur cercle de base pour qu'elles soient en contact en $A$. Pour cela, calculons les angles $\widehat{AOD}$ et $\widehat{AO'D'}$ (voir la figure 15). La longueur de l'arc $\widehat{DT}$ est égale à celle du segment $[TA]$ et dans le triangle $OAT$, on a

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{|TA|}{|OT|} \qquad \text{et donc} \qquad |TA| = |OT|\mathrm{tg}\alpha.$$

Comme la mesure d'un angle en radian est égale au rapport entre la longueur de cet arc et la longueur du rayon, on a :

$$\widehat{TOD} \text{ (en rad)} = \mathrm{tg}\alpha$$

$$\widehat{AOD} \text{ (en rad)} = \mathrm{tg}\alpha - \alpha.$$

De la même manière, on trouve

$$\widehat{AO'D'} \text{ (en rad)} = \mathrm{tg}\alpha - \alpha.$$

Nous connaissons à présent le point de départ de chaque développante, il reste à les tracer. Les deux développantes en contact sont perpendiculaires à une même droite et ont donc une tangente commune. Le contact est donc parfait.

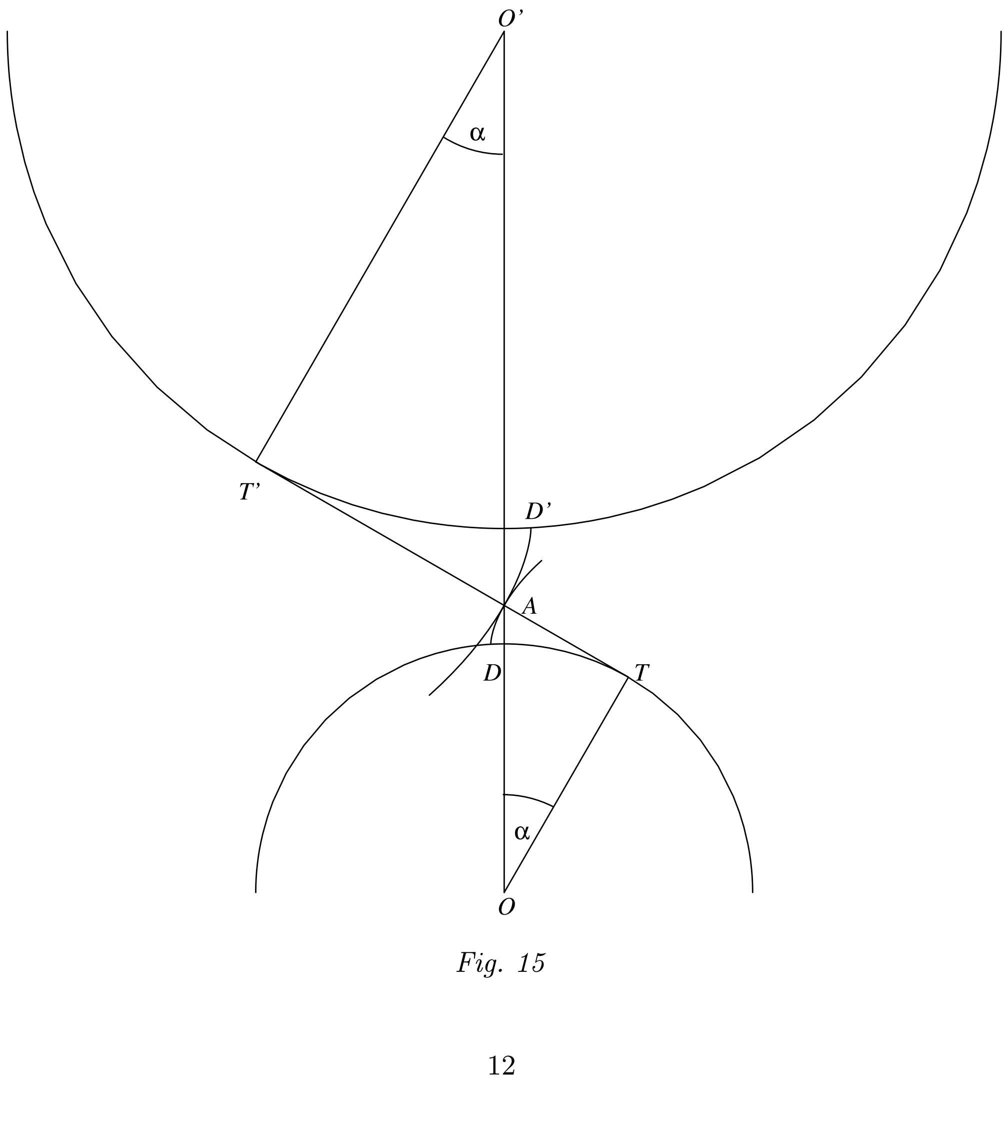


*Fig. 15*

### 3.1 Fonctionnement

*Comment s'y prendre ?*

Nous allons enfin comprendre comment fonctionne un engrenage. Nous avons construit pas à pas deux courbes pouvant représenter les profils de dents en contact. Ce sont deux développantes de cercle $\gamma$ et $\gamma'$ dont les points de départ sont respectivement $D$ et $D'$.

> On fait tourner la petite roue dans le sens trigonométrique d'un angle $\delta$, pas trop grand. La grande roue est entraînée dans le mouvement. De quel angle tourne alors la grande roue ?

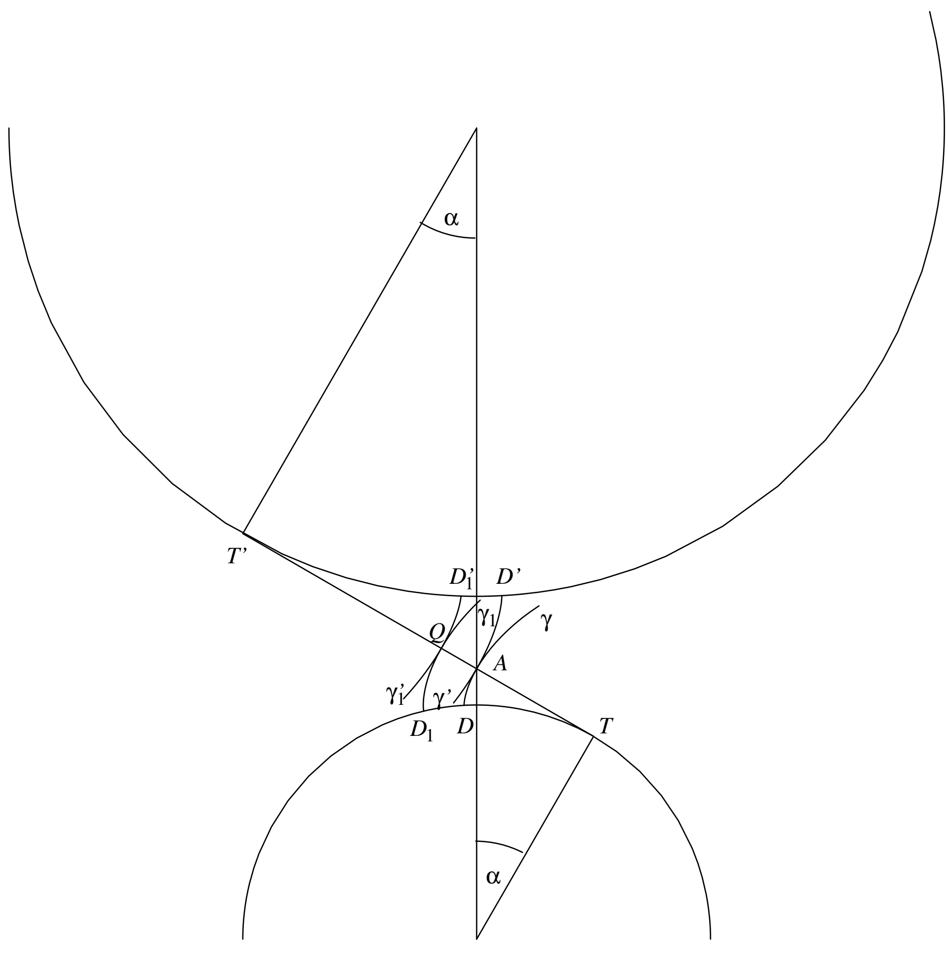


*Fig. 16*

Sur la figure 16, les courbes $\gamma$ et $\gamma'$ représentent les profils de dents, lorsque leur point de contact est en $A$. Lorsqu'on fait tourner la petite roue d'un angle $\delta$, le point le point $D$ va en $D_1$, le profil $\gamma$ va tourner et en même temps pousser $\gamma'$ (voir la figure 16). Les courbes $\gamma_1$ et $\gamma'_1$ représentent la nouvelle position des deux développantes. Les développantes $\gamma_1$ et $\gamma'_1$ restent en contact et gardent une normale commune qui est la droite $TT'$. Si $D$ va en $D_1$, le nouveau point de contact

$Q$ des développantes est donc sur $TT'$ et tel que :

$$|AQ| = \text{longueur de l'arc } \widehat{DD_1}$$

puisque $|TA| =$ longueur de l'arc $\widehat{TD}$ et $|TQ| =$ longueur de l'arc $\widehat{TD_1}$. Mais si $A$ va en $Q$, le point de départ de $\gamma'$, $D'$, va en $D'_1$ qui est tel que

$$\text{longueur de l'arc } \widehat{D'D'_1} = |AQ|.$$

Donc si le petit cercle tourne d'un angle $\delta$, le point $D$ sur ce cercle se déplace d'un arc de longueur $\delta \cdot r$ et $D'$ se déplace d'un arc de longueur $\delta' \cdot r'$ tel que $\delta \cdot r = \delta' \cdot r'$ sur le grand cercle. L'angle $\delta'$ dont a tourné le grand cercle est donc $\delta' = \delta \dfrac{r}{r'}$.

Dans l'exemple choisi, comme $r' = 2r$, le grand cercle tourne d'un angle $\dfrac{\delta}{2}$ lorsque le petit cercle tourne d'un angle $\delta$. Si le rapport des diamètres des cercles de base est 2, le petit cercle fait donc deux tours chaque fois que le grand en fait un. Si $d$ et $d'$ sont les diamètres des cercles de bases, $N$ et $N'$ leurs vitesses en nombre de tours par seconde, on a les relations $\dfrac{d'}{d} = 2$ et $\dfrac{N'}{N} = \dfrac{1}{2}$. Les rapports $\dfrac{d'}{d}$ et $\dfrac{N'}{N}$ sont inverses.

Ces relations sont les mêmes que celles que l'on obtient pour deux cylindres primitifs de centre $O$ et $O'$ et dont les diamètres seraient dans un rapport $1/2$, c'est-à-dire deux cylindres de friction qui seraient tangents en $A$.

Si le rapport des diamètres est différent de 2, les résultats restent valables. De manière générale, si $d$ et $d'$ sont les diamètres des cercles de bases, $N$ et $N'$ le nombre de tours par seconde, on a la relation :

$$\frac{d'}{d} = \frac{N}{N'}.$$

Cette relation est la même que pour deux cylindres de friction dont les centres sont confondus avec ceux des cercles de bases et dont les diamètres $d_p$ et $d'_p$ sont dans le même rapport que $d$ et $d'$. Les sections de ces deux cylindres (les cercles primitifs) seraient tangents en $A$, point d'intersection de la droite des centres et de la tangente commune aux deux cercles de base.

Grâce au profil des dents en développante de cercle, un engrenage produit le même effet que deux cylindres de friction *parfaits*, c'est-à-dire qui roulent l'un sur l'autre sans *aucun glissement*. Cela a pour conséquence que le rapport de vitesses de rotation des roues est parfaitement constant. Ces engrenages permettent donc une transmission d'énergie constante.

De plus, au point $A$, appelé point d'engrènement, le frottement entre les dents est nul. En effet, en ce point, les vitesses tangentielles des deux cercles primitifs sont égales. En décomposant ces vitesses selon la tangente commune et la normale commune aux deux dents en contact, on trouve l'égalité entre les deux composantes selon la tangente commune. Donc, au point d'engrènement, les dents roulent l'une sur l'autre sans glissement. Il y a absence de frottement. Il s'agit là d'une propriété mécanique extrêmement importante. Comme les dents roulent l'une sur l'autre, il n'y a ni échauffement, ni perte d'énergie, provoqués par un phénomène de glissement. On se trouve dans des conditions similaires à celles d'une roue de wagon de chemin de fer roulant sur un rail sans patiner. En s'arrangeant pour que la zone de contact effective des deux dents se situe toujours autour du point d'engrènement, on peut réduire le glissement au minimum et donc la perte d'énergie due aux frottements. Les engrenages à dentures en développante de cercle peuvent donc atteindre des rendements extrêmement élevés.

Pour ces raisons, les engrenages dont les dents sont en développantes de cercles restent gagnants. Bien qu'ils soient complexes et coûteux, leur utilisation s'est généralisée dans la plupart des applications car ils sont les plus efficaces.

## Références


[1] Caterpillar, *Cours d'engrenages*, Caterpillar Belgium S.A. Division Training.

[2] Deletrain, M. et Goffart, B., 1986, *Les spirales, de vieilles figures pour un enseignement vivant de la géométrie*, Mémoire de licence, Université Catholique de Louvain.

[3] Klein. F., 2004, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint : Geometry*, translated from the third german edition, Dover publications.