Argumenter ?
Pourquoi ? Quand ? Comment ?

1. Quand et pourquoi ?

Au travers de quelques situations adaptées à des classes des trois premières années du secondaire, nous allons tenter de répondre à cette première question en développant deux axes majeurs :

Il est indispensable de placer les élèves dans des situations qui vont susciter des conflits, des questions, des étonnements.

- Qui a raison ?
- Pourquoi est-ce toujours comme cela ?
- Comment est-ce possible ?

C'est en essayant de répondre à de telles questions que l'on peut espérer motiver des élèves à des activités d'argumentation. Il s'agit de faire rechercher des arguments qui sont accessibles et acceptés par tous.

L'argumentation n'est pas réservée aux objets géométriques.

Il est possible de rencontrer des situations numériques qui provoquent le même genre de question. Ce type de situation est accessible avant même les situations géométriques dans une classe de première et permet de rencontrer l'algèbre en tant qu'outil de généralisation, de justification.

1.1 La grande illusion

12	13	15	17
8	9	11	13
5	6	8	10
6	7	9	11

Choisir un nombre dans la grille (par exemple 15).
Barrer la ligne et la colonne de ce nombre.
Choisir un autre nombre ; barrer sa ligne et sa colonne ; continuer (par exemple 7, puis 5).
Quel est le dernier nombre de la grille (dans l'exemple, c'est 13)

Vous pouvez jouer au magicien en imitant le dialogue suivant :

prof. « Quel est ton dernier nombre ? »
élève « 13 »
prof. « La somme des trois nombres que tu as choisis est …(petite hésitation) 27 »

Comment est-ce possible ?

Il n'est pas difficile de vérifier que la somme des quatre nombres (les trois nombres choisis et le nombre restant) est toujours 40. (Encore faudra-t-il dans une classe rectifier les éventuelles erreurs de calcul !)

La démonstration passe
- par une phase de recherche : *Comment fabriquer une autre grille du même type ?*

- et par la découverte que ces grilles proviennent de tables d'additions.

+	a	b	c	d
e	12	13	15	17
f	8	9	11	13
g	5	6	8	10
h	6	7	9	11

La somme des quatre nombres est $a + b + c + d + e + f + g + h$; ce qui revient à utiliser la commutativité et l'associativité comme outils d'argumentation.
Il y a évidemment une infinité de solutions pour les nombres *a, b, …, h*.

On peut aller plus loin et chercher les liens entre ces nombres :

+	n	$n + 1$	$n + 3$	$n + 5$
$12 - n$	12	13	15	17
$8 - n$	8	9	11	13
$5 - n$	5	6	8	10
$6 - n$	6	7	9	11

Le calcul algébrique (réduction des termes) permet alors de calculer cette somme et de trouver 40.

1.2 Tourner en rond

Choisir deux nombres n_1 et n_2.
Construire une suite de nombres

puis une autre suite

Continuer

En prenant comme nombres de départ 2 et 5, on obtient
comme première suite :

2
5
2.5
0.5
0.2
0.4
2
5

comme deuxième suite :

2
5
3
0.8
0.6
2
5

comme troisième suite :

2
5
3.5
1.1
0.8857143
2.6233766
5.2199413
2.75215586
0.91038491
1.05749277
3.35846159
5.06713782
2.10427829
0.80997961

Le calcul algébrique apparaît ici comme un moyen de justifier que les deux premières suites sont cycliques :

la première suite donne ,

la deuxième suite donne .

1.3 Est-il premier ?

Calculer $n^2 + n + p$ pour des valeurs naturelles de n (à commencer par 0, 1, 2, 3, …) et sachant que p est premier.
Choisir 17 comme valeur de p. Analyser les résultats obtenus.

Et si on choisit d'autres valeurs de p ?

Différentes conjectures peuvent apparaître :

Les résultats obtenus sont des nombres premiers .

Les premières valeurs calculées sont des nombres premiers : 17, 19, 23, 29, 37, 47, 59, 73, 89, 107, 127, … et peuvent constituer une justification aux yeux d'élèves habitués à ne vérifier que quelques exemples.

La force du contre-exemple prendra ici toute sa signification :
pour $n = 16$, la valeur calculée est 289, soit le carré de 17,
pour $n = 17$, il n'est pas nécessaire de calculer pour savoir que $17^2 + 17 + 17$ est divisible par 17.

Le tableau suivant reprend les premières valeurs calculées en remplaçant 17 par p.
L'examen de ce tableau permet de renforcer la conviction que :

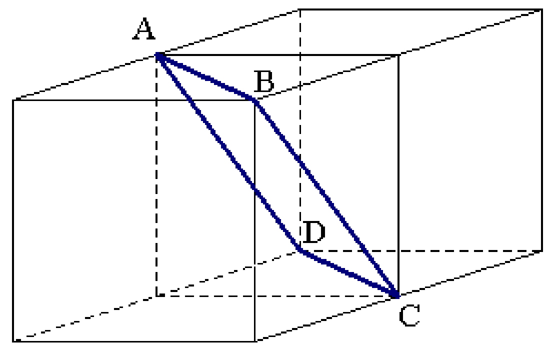
Pour $n = p - 1$, la valeur calculée est p^2.

La recherche d'un contre-exemple pourrait s'avérer fastidieuse d'autant plus que : .
Ce calcul algébrique constitue la démonstration de cette conjecture ; celle-ci peut même être étendue : la propriété est vraie pour tout nombre p.

Pour $n = p$, la valeur calculée $p^2 + p + p$ n'est jamais un nombre premier.

Le nombre $p^2 + p + p$ est toujours divisible par p et par $p + 2$; sa forme factorisée $p(p + 2)$ en constitue la démonstration.

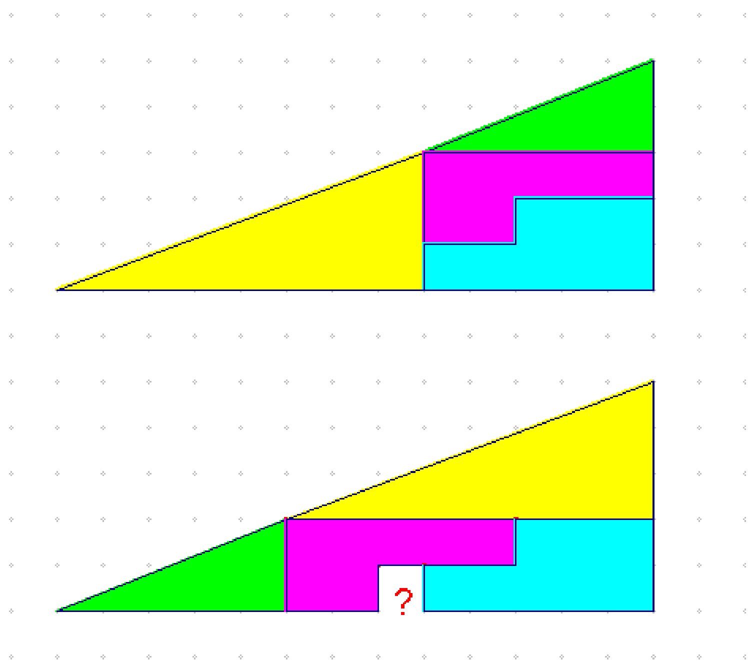
1.4 Que vois-je ?



Les points A, B, C et D sont sommets des deux cubes représentés en perspective cavalière.
Quelle est la nature de la figure ABCD ?

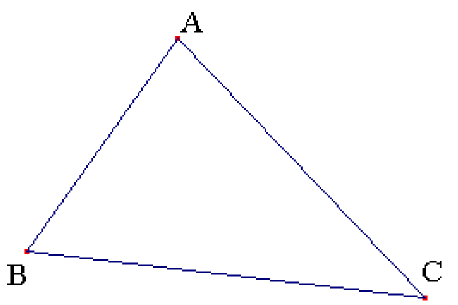
Les questions posées sur des représentations de solides constituent le terrain idéal pour motiver la justification : les impressions visuelles (« *on voit bien que …* ») sont souvent trompeuses et l'argumentation va s'avérer décisive. Dans cette situation, c'est en raisonnant que vous découvrirez un magnifique calisson !

1.5 Qu'avez-vous perdu ?



Cette situation semble impossible. Le support du quadrillage permet de mieux se rendre compte de l'isométrie des pièces correspondantes et par conséquent renforce l'impression de trucage, d'anomalie !
La démonstration nécessite d'établir un lien entre l'alignement des points, les triangles semblables et la pente d'une droite.

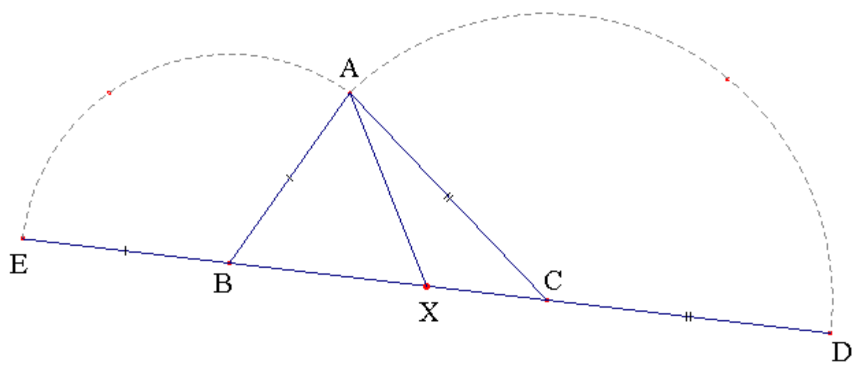
1.6 Remarquables[1] ! :



Trouver un point X, sur le côté [BC], tel que les triangles ABX et AXC aient le même périmètre.

Si la construction du point X est du niveau des élèves, les prolongements, les questions qu'ils posent sont réservés aux adultes (*mathématisés* !)

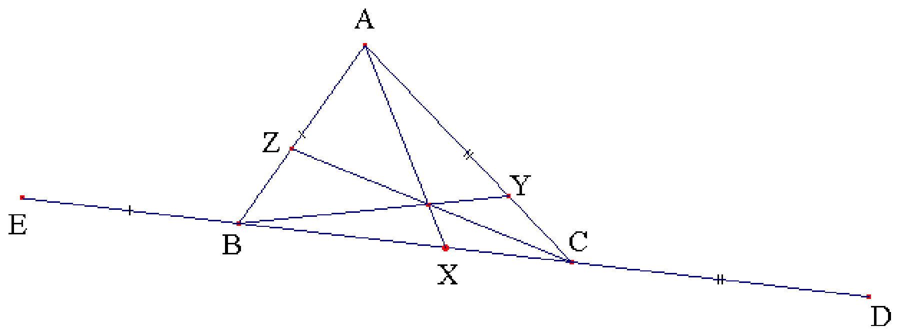
Voici une façon de déterminer le point X :



X est le milieu de [ED].

[1] Pour adultes !

Ce que l'on vient de réaliser sur le côté [BC] peut évidemment s'imaginer sur [AC] et sur [AB]. Ce qui va nous amener le problème suivant : les droites solutions semblent concourantes et pourtant ce ne sont pas des droites remarquables (classiques !) du triangle.

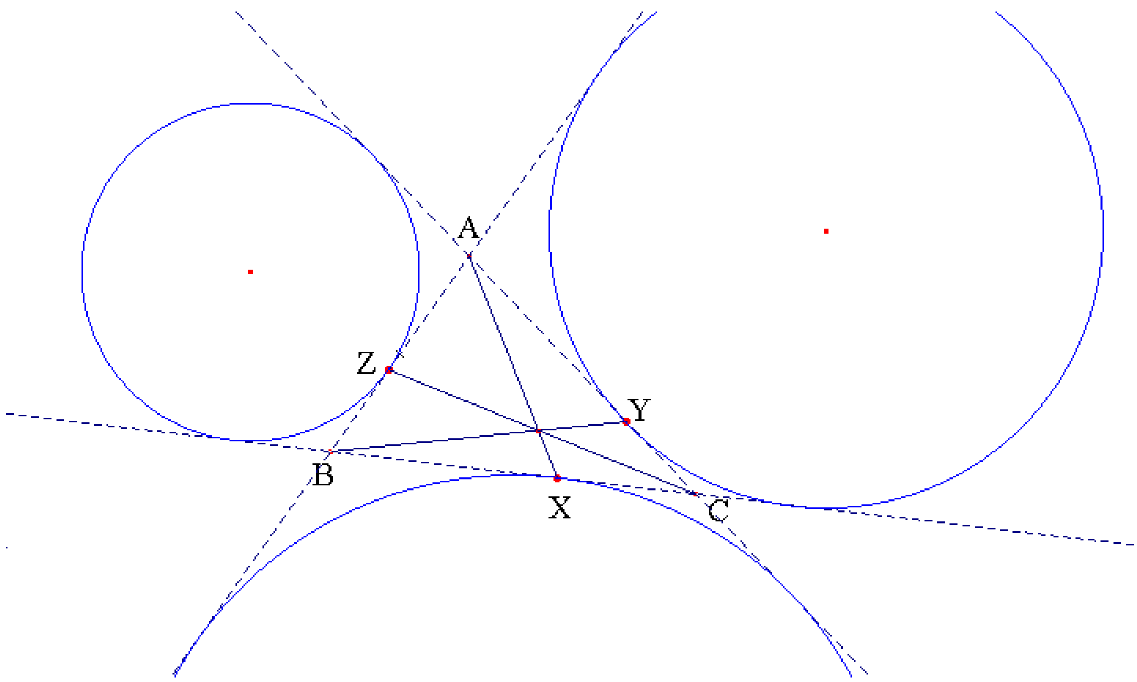


Il est facile d'établir que .

Le théorème de Céva permet alors d'affirmer que les trois droites sont concourantes.

Et ce n'est pas tout !

Si les droites ne sont pas remarquables, on ne peut pas en dire autant des points X, Y et Z !



2. Comment ?

2.1 Construire des outils

Créer le besoin d'argumenter chez les élèves est primordial, mais cela a pour conséquence qu'il faut construire avec eux des moyens de justification.

Nous allons détailler un moment de cette phase d'apprentissage en géométrie.
Une manière de procéder est de construire, à partir des *synthèses descriptives* (listes de propriétés), des *synthèses fonctionnelles* ou « *boîte à outils* ».

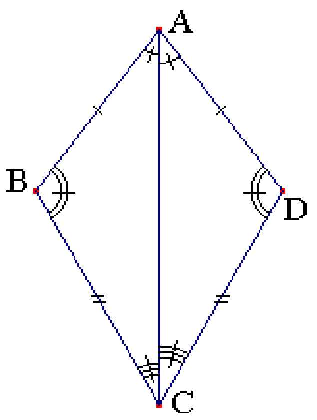
Si les premières servent à répondre aux questions « *Qu'est-ce que … veut dire ?* » et doivent être accompagnées d'un <u>index</u>, les secondes doivent apporter des réponses aux questions « *Comment puis-je justifier que … ?* » et être munies d'un mode d'emploi comme celui qui suit.

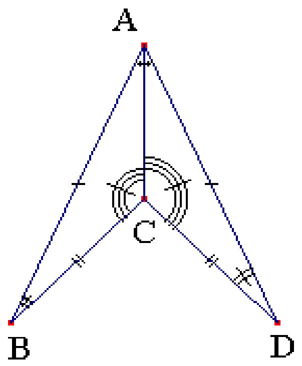
<u>Justifier</u>

Illustrons, par un exemple, comment faire passer les élèves de la description des objets à la construction d’outils.

Prenons le cerf-volant :

Synthèse descriptive acceptable





<u>ABCD est un cerf-volant</u>

1. |AB| = AD|
2. |BC| = |CD|

3.

4. AC est bissectrice de Â et de

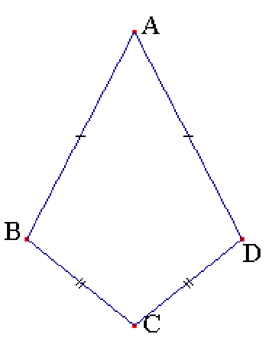
En utilisant les propriétés des triangles isocèles ABD et BCD :

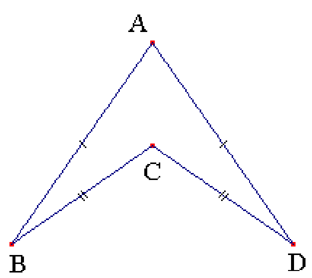
5. AC est médiatrice de [BD]

C’est par le biais d’exercices de construction que l’on peut faire comprendre à des élèves du premier degré

- qu’il n’est pas obligatoire d’utiliser toutes les propriétés d’un cerf-volant pour le construire (déterminer),
- qu’il y a plusieurs manières de le construire (déterminer).

On peut utiliser les propriétés 1 et 2 ; cela donne

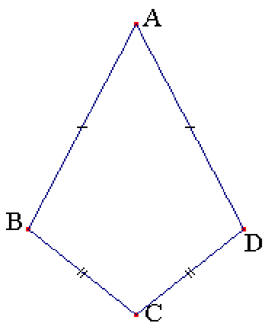


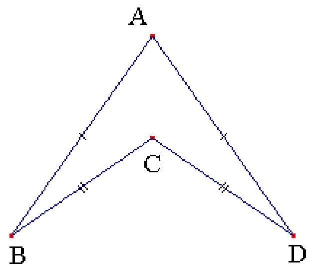


Dans tous les cas, on a construit un cerf-volant (même si les formes diffèrent).

Synthèse fonctionnelle acceptable

<u>Dès que je sais que</u> :





|AB| = AD|

|BC| = |CD|

<u>je peux déduire que</u> :

ABCD est un cerf-volant

<u>et, en cadeau, je reçois les propriétés suivantes</u> :

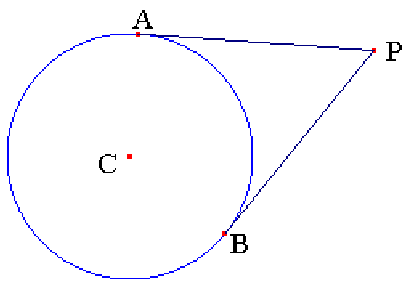
AC est bissectrice de Â et de
AC est médiatrice de [BD]

On peut aussi utiliser les propriétés 1 et 3 ou encore la propriété 4 …, ce qui débouche sur des synthèses fonctionnelles du même genre.

2.2 Utiliser les outils

C'est bien de fabriquer des outils, mais il ne faut pas qu'ils dorment dans une armoire !
Voici quelques exemples d'utilisation :

- tangentes à un cercle



PA et PB sont tangentes au cercle.

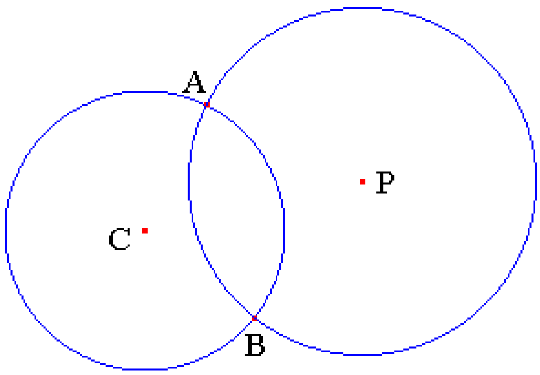
On peut déterminer un cerf-volant par les propriétés 1 et 3 :

rayons égaux |AC| et |CB|
angles égaux en A et B (90°)

et recevoir en cadeau :

|AP| = |BP|
CP axe de symétrie de la figure.

- cercles sécants



On peut déterminer un cerf-volant par les propriétés 1 et 2 :

rayons égaux

|AC| = |CB| et |PA| = |PB|

et recevoir en cadeau :

CP est médiatrice de [AB].

Deux documents de travail sont disponibles sur le site www.PROFOR.BE/CREM.
Ils reprennent les synthèses descriptives et fonctionnelles des trois premières années du secondaire.
Ils sont écrits en Word7 et les figures sont réalisées par Cabri (version Windows).
Attention, ils ne constituent que des modèles qui doivent être retravaillés !
Si vous les utilisez et surtout si vous les adaptez à vos cours et à vos classes, les formateurs du CREM seraient heureux de bénéficier de vos remarques et de vos suggestions, ainsi que de vos versions personnalisées.

B. HONCLAIRE
CREM
5, rue Emile Vandervelde
1400 NIVELLES
067 - 21 25 27